第８講　基本なんだけど…

28 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ．

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29　△ABC において ∠BAC＝90°，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ とする．△ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$$

を満たすとする．

(1)　∠APB，∠APC を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ．

《13 東大・理科》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30　四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする．

また 3 点 O，A，B を含む平面を L とする．

(1)　点 C から平面 L に下ろした垂線の足を H とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$0<t<1$ をみたす実数 t に対して，線分 OA，OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく．2 点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

《10 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　基本なんだけど…

28 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める.

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ.

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し, $p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ.

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める.

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し, $p_n=q_{2n-1}$ を示せ.

《15 東大・理科》

【答】 (1) 略　(2) $p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　(3) 略

【解説】 (1)
$$\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)^2+{p_{n+1}}^2+1}{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}$$
$$=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+({p_{n+1}}^2+1){p_n}^2}{({p_{n+1}}^2+1)\cdot p_{n+1}p_n}=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$$ なので,

$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\dfrac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1}=3$. よって $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ は n によらない一定の値 3 をとる.

(2) $p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ より ${p_{n+1}}^2+1=p_{n+2}p_n$. これと(1)の結果の $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ より

$\dfrac{p_{n+2}p_n+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=3$.

ゆえに $\dfrac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}=3 \iff p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}\ (n\geqq 1)$ が成り立つ.

よって $\boldsymbol{p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n}$.

(3) (2)の結果より, $n\geqq 1$ のとき, $p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n$ が成り立つ.

$p_1=1$, $q_1=1$ より, $n=1$ のとき $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ. $p_2=2$, $q_3=q_2+q_1=2$ より, $n=2$ のとき $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ.

ここで, $n=k(\geqq 1)$ のとき, $p_k=q_{2k-1}$, $p_{k+1}=q_{2k+1}$ が成り立つことを仮定するとき, $p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k$ であり,

$$q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}=(q_{2k+1}+q_{2k})+q_{2k+1}=\{q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})\}+q_{2k+1}$$
$$=3q_{2k+1}-q_{2k-1}=3p_{k+1}-p_k$$

となるので, $p_{k+2}=q_{2k+3}$, つまり $n=k+2$ のときにも $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ.

以上より, 数学的帰納法を用いて $p_n=q_{2n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が示された.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29　△ABC において ∠BAC＝90°，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ とする．△ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$$

を満たすとする．

(1)　∠APB，∠APC を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ．

《13 東大・理科》

【答】 (1)　∠APB＝∠APC＝120°　　(2)　$|\overrightarrow{PA}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PB}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PC}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

【解説】 (1)　$\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}=\vec{a}$ とおくと，$|\vec{a}|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}\right|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PA}|}=1$ である．同様に $\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}=\vec{b}$，$\dfrac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{c}$ とおくと $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$．このとき $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ なので

$|\vec{c}|^2=|-\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$．これと $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$.

ここで，∠APB は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角のことなので $\cos\angle APB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，つまり **∠APB＝120°**.

また $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ より同様に $\cos\angle APC=-\dfrac{1}{2}$

∴　**∠APC＝120°**.

(2)　$|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$|\overrightarrow{PC}|$ を順に α，β，γ とおく．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=-\dfrac{1}{2}$ より $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\dfrac{1}{2}\alpha\beta$ であり，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ と $|\overrightarrow{AB}|=1$ より

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=1$　…①

ここで ∠APB＝∠APC＝120° より ∠BPC＝120° なので $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{2}$ となり，∠BAC＝90°，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ より $|\overrightarrow{BC}|=2$ となるので，同様に $\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma=4$ …②，$\gamma^2+\alpha^2+\gamma\alpha=3$　…③を得る．

①−②，②−③より

$(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=-3$，$(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)=1$ となるが，$\alpha+\beta+\gamma=t(>0)$ とおくと，$(\alpha-\gamma)t=-3$，$(\beta-\alpha)t=1$ より $\beta=\dfrac{1}{t}+\alpha$，$\gamma=\dfrac{3}{t}+\alpha$ となるので，これらと $\alpha+\beta+\gamma=t$ より $\alpha=\dfrac{1}{3}\left(t-\dfrac{4}{t}\right)$，$\beta=\dfrac{1}{3}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$．これらを①に代入して整理すると $(t^2-1)(t^2-7)=0$ となり，$\alpha>0$ を満たすものは $t=\sqrt{7}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$\beta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$\gamma=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ となり，これらが求める値である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30　四面体OABCにおいて，4つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする．

また3点O，A，Bを含む平面をLとする．

(1)　点Cから平面Lに下ろした垂線の足をHとおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．

(2)　$0<t<1$をみたす実数tに対して，線分OA，OB各々を$t:1-t$に内分する点をそれぞれP_t，Q_tとおく．2点P_t，Q_tを通り，平面Lに垂直な平面をMとするとき，平面Mによる四面体OABCの切り口の面積$S(t)$を求めよ．

(3)　tが$0<t<1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ．

《10東大・理科》

【答】　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　(2)　$S(t)=\begin{cases}3\sqrt{6}\,t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right)\\ -\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1) & \left(\dfrac{2}{9}<t<1\right)\end{cases}$

(3)　$\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$

【解説】　条件より$\mathrm{OC}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=\sqrt{7}$である．

このとき$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}=\dfrac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2}=6$，同様に$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3$を得る．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(α，βは実数)とおくと

CH⊥OAより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=9\alpha+6\beta-3=0\end{aligned}$$

またCH⊥OBより同様に

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=6\alpha+7\beta-1=0\end{aligned}$$

よって$\alpha=\dfrac{5}{9}$，$\beta=-\dfrac{1}{3}$となるので，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$.

(2)　(1)より
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=|\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\beta^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2\alpha\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

なので$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$である．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$より，Hが直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上になるのは

$$\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-u)\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(u\text{は実数})$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となるときなので，$\dfrac{5}{9}=(1-u)t$ かつ $-\dfrac{1}{3}=ut$ より $t=\dfrac{2}{9}$ となる．

(Ⅰ)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき，平面 M と OC との交点を C_t とすると，$\triangle\mathrm{C}_t\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ と $\triangle\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$ は相似で，相似比が $t:\dfrac{2}{9}=9t:2$ より $\triangle\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$ の面積が $\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2}{9}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\dfrac{4\sqrt{6}}{27}$ となるので，$S(t)=\dfrac{4\sqrt{6}}{27}\times\left(\dfrac{9t}{2}\right)^2=3\sqrt{6}\,t^2$

(Ⅱ)　$\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき，平面 M と AC，平面 M と BC との交点をそれぞれ A_t，B_t とおくと，$\triangle\mathrm{CA}_t\mathrm{B}_t$ と $\triangle\mathrm{CAB}$ が相似であることより $\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t=\dfrac{2(9t-2)}{7}$ であり，また $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=2t$ である．

$\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t$ と $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ の距離 d は $d=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|}{1-\dfrac{2}{9}}(1-t)=\dfrac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)$ なので

$$S(t)=\frac{(\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t+\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t)\times d}{2}=-\frac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1)$$

以上より，
$$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases}3\sqrt{6}\,t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right)\\ -\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1) & \left(\dfrac{2}{9}<t<1\right)\end{cases}}.$$

(3)　(2)の結果と $-\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(t-1)=-\dfrac{96\sqrt{6}}{49}\left(t-\dfrac{9}{16}\right)^2+\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$ であることより，

求める最大値は $S\left(\dfrac{9}{16}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\sqrt{6}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。